# مباحثی روی بستار راتلیف-راش یک ایده ال

امیر مافی؛ دانشگاه کردستان، دانشکدهٔ علوم پایه،گروه ریاضی
سید شهاب ارکیان؛ دانشگاه فرهنگیان استان کردستان

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

## چکیده

بستار راتلیف-راشِ ایده‌ال نا صفر $I$، در حلقه جابه‌جایی، یکدار و نوتری $R$، به‌صورت $\tilde{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(I^n :_R I^{n-1})$ است. در این مقاله، ویژگی‌های بستار راتلیف-راش یک ایده‌ال را با بستار صحیح آن مقایسه شده است. به‌علاوه ایده‌ال‌هایی، مانند $I$ که عمق حلقه مدرج وابسته به آن مثبت است، را به‌عنوان ایده‌ال‌هایی که تمام توان‌های آن راتلیف-راش است (ایده‌ال با بستار راتلیف-راشِ خود برابر است)، معرفی شده است. ضمن بیان این‌که هر ایده‌ال منظم یک تقلیل بستار راتلیف-راشِ خودش است، دستوری برای محاسبهٔ بستار راتلیف-راش یک ایده‌ال از روی یک تقلیل آن ارائه شده است. این حقیقت که چندجمله‌ای هیلبرت یک ایده‌ال با چند جمله‌ای بستار راتلیف-راش آن یک‌سان است، از دیگر نتایج است.

**واژه‌های کلیدی:** بستار راتلیف-راش، بستار صحیح، چند جمله‌ای هیلبرت، عدد تقلیل

## مقدمه

در سراسر این بحث، منظور از حلقه، حلقه جابه‌جایی، یکدار و نوتری است. فرض کنید $R$ یک حلقه و $I$ یک ایده‌ال منظم $R$ باشد ($I$ شامل یک عنصر $R$، که مقسوم علیه صفر نیست، است). در این‌صورت برای ایده‌ال‌هایی به‌صورت $(I^n :_R I^{n-1}) = \left\{x \in R \,\middle|\, xI^{n-1} \subseteq I^n\right\}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $(I^n :_R I^{n-1}) \subseteq (I^{n+1} :_R I^n)$. فرض کنید $\tilde{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(I^n :_R I^{n-1})$. نخستین بار راتلیف[1]و راش[2] $\tilde{I}$ را بررسی کردند [۱۵]. آن‌ها ثابت کردند $\tilde{I}$ بزرگ‌ترین ایده‌ال یکتای $R$ است که برای $k \gg 0$ داریم $(\tilde{I})^k = I^k$، ([۱۵]، قضیهٔ ۲،۱).

از این‌رو $\tilde{I} = \tilde{\tilde{I}}$. ایده‌ال منظم $I$ را که $\tilde{I} = I$ ایده‌ال راتلیف-راش گفته، $\tilde{I}$ را ایده‌ال راتلیف-راشِ $I$ یا بستار راتلیف-راش $I$ گوییم. در بخش نخست این مقاله، برخی از خواص بستار راتلیف-راشِ ایده‌ال‌ها بررسی می‌شود. از جمله، یک سری از تشابهات و تفاوت‌های بستارهای صحیح و راتلیف-راش را ارائه می‌شود. بخش دوم، به بررسی توسیع بستار راتلیف-راشِ یک ایده‌ال تحت همریختی حلقه‌ها اختصاص دارد. در ادامه، ارتباط بین تقلیل یک ایده‌ال و بستار راتلیف-راشِ آن را بیان می‌کنیم. هم‌چنین چند جمله‌ای‌های هیلبرت یک ایده‌ال را با چند جمله‌ای‌های هیلبرت بستار راتلیف-راشِ آن مقایسه کرده، حالتی را در نظر می‌گیریم که این دو با هم برابر هستند. در پایان حوزه‌های نوتری که همهٔ ایده‌ال‌های آن‌ها راتلیف-راش است، معرفی می‌شود.

---

*نویسنده مسئول A_Mafi@ipm.ir

1. Ratliff
2. Rush

## برخی ویژگی‌های بستار راتلیف-راش

ابتدا توجه داریم که اگر $I$ یک ایده‌ال منظم نباشد، آن‌گاه لزوماً $\tilde{I}$ بزرگ‌ترین ایده‌ال یکتای $R$ که برای برای $0 \ll k$، $(\tilde{I})^k = I^k$ نیست. به‌عنوان مثال، اگر $F$ یک میدان، $x$ یک متغیر روی میدان $F$ و $R = F[x]/x^{۲}$ باشد. ایده‌ال $I = xR$ منظم نیست و $J = xR$ بزرگ‌ترین ایده‌ال یکتای $R$ است که برای هر $0 \ll k$، $J^{\mathrm{k}} = I^k$؛ اما $\tilde{I} = R$، [۱۶]. از این‌رو، در ادامه، همواره فرض می‌کنیم $I$ یک ایده‌ال منظم $R$ است. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت $k$ را که $\tilde{I} = (I^{k+۱}:_R I^k)$، عدد راتلیف-راش ایده‌ال $I$ گفته، آن را با $k(I)$ نشان می‌دهیم. البته، برای ما مشخص نیست که مقدار $k(I)$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد. هم‌چنین توجه داریم که تساوی $(I^{n+۱}:_R I^n) = (I^{n+۲}:_R I^{n+۱})$، گزاره $(I^{n+۱}:_R I^n) = (I^{n+۳}:_R I^{n+۲})$، را ایجاب نمی‌کند. به‌علاوه توجه داریم که اگر $I$ یک ایده‌ال حلقه $R$ باشد، آن‌گاه $\widetilde{I^n} = \bigcup_{k=۱}^{\infty}(I^{n+k}:_R I^k)$. به‌سادگی می‌توان دید هر عنصر $a \in \left(I^n:_R I^{n-۱}\right)$ روی I صحیح است. یعنی، $k \in \mathbb{N}$ و عناصر $b_i \in I^i$ برای $i = ۱,\cdots,k$ چنان موجودند که $a^k + b_۱ + a^{k-۱} + \cdots + b_k = 0$ . پس $\tilde{I}$ بین $I$ و بستار صحیح $I$، $\bar{I}$ است (بستار صحیح $I$، عبارت است از مجموعه همه عناصر R که روی $I$ صحیح هستند). بنابراین هر ایده‌ال به‌طور صحیح بسته، یک ایده‌ال راتلیف-راش است. از طرفی چون $\tilde{I} \subseteq \sqrt{I}$، پس هر ایده‌ال رادیکال نیز یک ایده‌ال راتلیف-راش است.

برای هر $0 < n$ زنجیر زیر از ایده‌ال‌ها را داریم

$$I^n \subseteq (I^{n+۱}:_R I) \subseteq (I^{n+۲}:_R I^{۲}) \subseteq \cdots \subseteq (I^{n+k}:_R I^k) \subseteq \cdots$$

این زنجیر ایستا است. از این‌رو عدد صحیح مثبتی مانند $t$، وابسته به $n$، چنان وجود دارد که برای هر $t \leq k$، $\widetilde{I^n} = (I^{n+k}:_R I^k)$. واضح است که $\widetilde{I^0} = R$ و برای همه اعداد صحیح نامنفی $i$ و $j$ داریم $I^i \subseteq \widetilde{I^i}$، $\widetilde{(I^{i+۱})} \subseteq \widetilde{I^i}$ و $\widetilde{I^i}\widetilde{I^j} \subseteq (\widetilde{I^{i+j}})$.

مثال ۱ به‌خوبی نشان می‌دهد که الزاماً در حالت کلی، ایده‌ال‌های $\tilde{I}.\widetilde{I^m}$ و $\widetilde{I^{m+۱}}$ یک‌سان نیستند.

**مثال ۱.** فرض کنید $F$ یک میدان، $y,x$ دو متغیر و $R = F[x,y]$ حلقه چندجمله‌ای روی $F$ و $I = \left(x^{۸},x^{۵}y^{۳},x^{۳}y^{۵},y^{۸}\right)$ باشد. در این‌صورت $\tilde{I} = I$ و $\widetilde{I^{۲}} = I^{۲}$ ولی $\widetilde{I^{۳}} = I^{۳}$. در نتیجه $\tilde{I}.\widetilde{I^{۲}} \subset \widetilde{I^{۳}}$ (برای محاسبهٔ ایده‌ال‌های راتلیف-راش از مکالی ۲، [۲]، استفاده کردیم).

ایده‌ال‌هایی، مانند آن‌چه در مثال ۲ آمده است، وجود دارند که تمام توان‌های بزرگ‌تر از یک آن‌ها راتلیف-راش است، بدون آن‌که خود راتلیف-راش باشد.

**مثال ۲.** فرض کنید $F$ یک میدان، $y,x$ دو متغیر و $R = F[x,y]$ حلقه چندجمله‌ای روی $F$ و $I = \left(x^{۴},x^{۳}y,xy^{۳},y^{۴}\right)$ ایده‌ال $R$ باشد. در این‌صورت چون $I^{۲} = (x,y)^{۸}$، پس

$$\tilde{I} = (x,y)^{۴} = \left(I,x^{۲}y^{۲}\right).$$

اما $x^{۲}y^{۲} \notin I$. بنابراین $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش نیست. در این مثال برای هر $n \leq ۲$، به‌طور آنتگرالی بسته است و بنابراین $I^n$ ایده‌ال راتلیف-راش است.

مثال ۳ نشان می‌دهد که مفهوم بستار صحیح یک ایده‌ال و بستار راتلیف-راش آن ایده‌ال متفاوت است.

**مثال۳.** فرض کنید $F$ یک میدان، $y,x$ دو متغیر و $R=F[x,y]$ حلقه چندجمله‌ای روی $F$ و $I=\left(x^{4},x^{3}y,x^{2}y^{2},y^{4}\right)$ ایده‌ال $R$ باشد. برای هر $n\in\mathbb{N}$، $xy^{3}\left(y^{4}\right)^{n}\notin I^{n+1}$ پس $xy^{3}\in(\bar{I}-\tilde{I})$.

فرض کنید $J,I$ دو ایده‌ال از حلقه $R$ چنان باشند که $I\subseteq J\subseteq\tilde{I}$. در این‌صورت، $\tilde{J}=\tilde{I}$، زیرا $\tilde{I}$ بزرگ‌ترین ایده‌ال یکتای $R$ است که برای است که برای هر $k\gg 0$، $\tilde{I}^{k}=I^{k}$ [۶]. اما در حالت کلی از رابطهٔ $I\subseteq J$، نمی‌توان نتیجه گرفت $\tilde{I}\subseteq\tilde{J}$.

**مثال۴.** فرض کنید $R=F[x,y]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان $F$، $I=\left(x^{4},x^{3}y,xy^{3},y^{4}\right)$ و $J=\left(x^{3},y^{3}\right)$. آن‌گاه $I\subseteq J$، اما $x^{2}y^{2}\in\tilde{I}-\tilde{J}$. همچنین برای ایده‌ال دلخواه $I$ از حلقه $R$ با فرض $m<n$ داریم $\widetilde{I^{n}}\subseteq\widetilde{I^{m}}$.

پرسش جالب در این مورد آن است که بدانیم تحت چه شرایطی با فرض $I\subseteq J$ می‌توان نتیجه گرفت $\tilde{I}\subseteq\tilde{J}$. مثلاً در حالتی که $J$ روی $I$ صحیح باشد، حکم درست است. اکنون سوالی که ممکن است مطرح شود این‌است که آیا همه توان‌های یک ایده‌ال راتلیف-راش، راتلیف-راش است؟ مثال زیر به‌خوبی نشان می‌دهد که پاسخ این پرسش منفی است.

**مثال ۵.** فرض کنید $R=F[x,y]$، حلقه چندجمله‌ای روی میدان $F$، $I$ ایده‌الی از $R$ تولید شده به‌وسیلهٔ عناصر $x^{22}$, $y^{22},x^{4}y^{18},x^{7}y^{15},x^{8}y^{14},x^{11}y^{11},x^{14}y^{8},x^{15}y^{7},x^{18}y^{4}$ باشد. نشان می‌دهیم $I$ راتلیف-راش است، اما $I^{2}$ چنین نیست. به‌سادگی می‌توان دید، چون ایده‌ال تک‌جمله‌ای $I^{2}$ها به‌وسیلهٔ تک‌جمله‌ای‌های

$x^{4}y^{40},\ x^{7}y^{37},\ x^{8}y^{36},x^{14}y^{30},x^{15}y^{29},x^{18}y^{26},x^{22}y^{22},x^{12}y^{32},x^{19}y^{25},x^{11}y^{33},\ x^{26}y^{18},x^{21}y^{23}$

$x^{25}y^{19},x^{29}y^{15},x^{1}$

تولید می‌شود، $x^{20}y^{22}$ در $I^{2}$ نیست، اما حاصل‌ضرب آن در $I$، مشمول در $I^{3}$ است. از این‌رو، $I^{2}$ راتلیف-راش نیست. برای اثبات راتلیف-راش بودن $I$ کافی است ثابت کنیم هر تک‌جمله عضو $\tilde{I}$، در $I$ است. چون $I$ یک ایده‌ال $(x,y)R$-اولیه است، کافی است ثابت کنیم هر تک جمله‌ای عضو $\tilde{I}\cap(I:(x,y))$ در $I$ است. اما تنها تک جمله‌ای‌های موجود در $(I:(x,y))$، عبارتند از:

$$x^{3}y^{21},x^{6}y^{17},x^{7}y^{14},x^{10}y^{13},x^{13}y^{10},x^{14}y^{7},x^{17}y^{6},x^{21}y^{3}.$$

باتوجه به تقارن موجود، کافی است نشان دهیم چهار جمله نخست در $\tilde{I}$ نیستند. اگر $x^{3}y^{21}\in\tilde{I}$، آن‌گاه برای عدد صحیح و مثبت $n$، $x^{3}y^{21}\left(y^{22}\right)^{n}\in\left(y^{22}\right)^{n+1}$ با بررسی درجهٔ $x$، این امر ایجاب می‌کند که $x^{3}y^{21}\left(y^{22}\right)^{n}\in\left(y^{22}\right)^{n+1}$، که این یک تناقض است. همچنین، اگر $x^{6}y^{17}\in\tilde{I}$، به‌طریق مشابه، $x^{6}y^{17}\left(y^{22}\right)^{n}\in\left(x^{4}y^{18},y^{22}\right)^{n+1}$ بنابراین برای یک عدد صحیح و نامنفی $a$ که $n+1\geq a$ داریم $x^{6}y^{17}\left(y^{22}\right)^{n}\in\left(x^{4}y^{18}\right)^{a}\left(y^{22}\right)^{n+1-a}$. بدون آن‌که از کلیت مسئله بکاهیم، با حذف توان‌های $y^{22}$، برای یک $n$ داریم $x^{6}y^{17}\left(y^{22}\right)^{n}\in\left(x^{4}y^{18}\right)^{n+1}$ بررسی توآن $x$، ایجاب می‌کند، $n=0$ و این غیر ممکن است. به طریق

مشابه، $x^{۷}y^{۱۴} \notin \tilde{I}$ . در غیر این‌صورت، برای برخی از اعداد صحیح و نامنفی $a, n$ که $a \leq n+۱$ داریم $x^{۷}y^{۱۴}\left(y^{۲۲}\right)^{n} \in \left(x^{۴}y^{۱۸}\right)^{a}\left(x^{۷}y^{۱۵}\right)^{n+۱-a}$. مجددا با بررسی درجه $x$، نتیجه می‌گیریم $n=0$ که غیر ممکن است. بالاخره $x^{10}y^{۱۳} \notin \tilde{I}$، زیرا در غیر این‌صورت برای یک $n$،
$x^{۱۰}y^{۱۳}\left(y^{۲۲}\right)^{n} \in \left(x^{۴}y^{۱۸}, x^{۷}y^{۱۵}, x^{۸}y^{۱۴}\right)^{n+۱}$. با بررسی درجه $x$، نتیجه می‌گیریم $n \geq ۱$، که هر دو حالت آن امکآن پذیر نیست. بنابراین $I$ راتلیف-راش است.

مثال قبل نشان می‌دهد بررسی راتلیف-راش بودن یک ایده‌ال تا چه آندازه می‌تواند دشوار باشد. در واقع، برخلاف بستار صحیح یک ایده‌ال، الگوریتمی برای محاسبه بستار راتلیف-راش یک ایده‌ال در دست نیست. در مثال قبل $I$ یک ایده‌ال به‌طور صحیح بسته نیست. هینزر[1] و همکارانش در ایده‌الی تک جمله‌ای ارائه کرده‌اند که راتلیف-راش است، اما توان سوم آن راتلیف-راش نیست [۵]. مثالِ آن‌ها الهام بخش ساختار ایده‌ال‌های راتلیف-راش تک‌جمله‌ای زیر، $I_n$، روی حلقه چند جمله‌ای $R = F[x,y]$ است که $(I_n)^n$راتلیف-راش نیست.

**مثال۶.** فرض کنید $I_n = \left(x^{۳n-۱}, x^{۳n-۴}y^{۳}, x^{۳}y^{۳n-۴}, y^{۳n-۱}\right)$ که در آن $n \geq ۳$یک عدد صحیح فرد است. ثابت می‌کنیم $(I_n)^n$ راتلیف-راش نیست. در واقع $(xy)^{n(۳n-۱)/۲} \in \widetilde{(I_n)^n}$. اما $(xy)^{n(۳n-۱)/۲} \notin (I_n)^n$.

برای اثبات تعلق کافی است ثابت کنیم برای عدد صحیح و مثبت $m$، $(xy)^{n(۳n-۱)/۲}\left(x^{۳n-۱}\right)^{۲m-۱} \in (I_n)^{n+۲m-۱}$. فرض کنید عدد $m$ چنان باشد که $n = ۲m+۱$ . در این‌صورت

$$
\begin{aligned}
(xy)^{n(۳n-۱)/۲}\left(x^{۳n-۱}\right)^{۲m-۱} &= (xy)^{۶m^۲+۵m+۱}x^{۱۲m^۲-۲m-۲}\\
&= \left(x^{۱۸m^۲+۳m-۱}y^{۹m+۳}\right)\left(y^{۶m^۲-۴m-۲}\right)\\
&= \left(x^{(۶m-۱)(۳m+۱)}y^{۳(۳m+۱)}\right).\left(y^{(۶m+۲)(m-۱)}\right)\\
&= \left(x^{۳n-۴}y^{۳}\right)^{۳m+۱}\left(y^{۳n-۱}\right)^{m-۱} \in (I_n)^{۴m} = (I_n)^{n+۲m-۱}.
\end{aligned}
$$

حال نشان می‌دهیم که $(xy)^{n(۳n-۱)/۲} \notin {I_n}^n$. در غیر این‌صورت اعداد صحیح نامنفی $d, c, b, a$ چنان موجودند که $a+b+c+d = n$ و $(xy)^{n(۳n-۱)/۲} = \left(x^{۳n-۱}\right)^{a}\left(x^{۳n-۴}y^{۳}\right)^{b}\left(x^{۳}y^{۳n-۴}\right)^{c}\left(y^{۳n-۱}\right)^{d}$. با جای‌گزینی $n = ۲m+۱$ تساوی زیر برای توان‌های $x$ به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
(۳m+۱)(۲m+۱) &= a(۶m+۲) + b(۶m-۱) + ۳c\\
&= ۲a(۳m+۱) + ۲b(۳m+۱) + ۳(c-b).
\end{aligned}
$$

1. Heinzer

از این‌رو، $(۳m+۱)(۲m+۱-۲a-۲b)=۳(c-b)$ . از این‌رو $c-b$ مضربی از $۳m+۱$ ، که این هم تنها به شرطی برقرار است که $c=b$ . لذا $۲m+۱-۲a-۲b=0$ . اما این معادلهٔ آخر جواب صحیح ندارد.

در نهایت مثال‌هایی از ایده‌ال‌های $I$ را بررسی می‌کنیم که همهٔ توان‌های آن‌ها راتلیف-راش است. قبل از آن، مفهوم تقلیل[1] یک ایده‌ال را یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۷.** (**تقلیل یک ایده‌ال**) فرض کنید $J\subseteq I$ ایده‌ال‌هایی از حلقه $R$ باشند $J$ را تقلیل $I$ گوییم هرگاه عدد صحیح و نامنفی $n$ چنان موجود باشد که $I^{\mathrm{n+۱}}=JI^n$. اگر $J$ یک ایده‌ال اصلی باشد آن را تقلیل اصلی گوییم. ایده‌ال $I$ دارای تقلیل اصلی است هرگاه عنصر $x\in I$ چنان موجود باشد که برای عددی صحیح چون $n$، داشته باشیم $I^{n+۱}=xI^n$، ([۷]، صفحه ۵۰۴ را ببینید). تقلیل $J$ از $I$ را مینیمال گوییم هرگاه $I$ دارای تقلیلی که به‌طور اکید مشمول در $J$ است، نباشد. فرض کنید $I$ یک ایده‌ال از حلقه موضعی $(R,M)$ و $J$ یک تقلیل مینیمال $I$ باشد. عدد $r_J(I)=\min\left\{n\middle|I^{n+۱}=JI^n\right\}$ را عدد تقلیل $I$ نسبت به $J$ گوییم. هم‌چنین، عدد تقلیل $I$ را با $r(I)$ نشان داده، به‌صورت $r(I)=\min\left\{r_J(I)\middle|\text{J مینیمال تقلیل یک I است}\right\}$ تعریف می‌کنیم.

**مثال ۸.** فرض کنید $I$ یک ایده‌ال پایدار[2] در حلقه نوتری $R$ باشد، (ایده‌ال $I$ را پایدار گوییم هرگاه یک تقلیل اصلی داشته باشد و عدد تقلیل آن حداکثر یک باشد). در این‌صورت $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش است (برای هر عدد صحیح مثبت $n$ ، اگر $x\in(I^{n+۱}:_R I^n)$؛ آنگاه $xa^n\in xI^n\subseteq I^{n+۱}=a^nI$، و چون $a$ مقسوم غیرصفر است، $x\in I$. چون مجموعه ایده‌ال‌های پایدار نسبت به ضرب بسته است (اگر $I^۲=aI$ و $J^۲=bJ$، آن‌گاه $(IJ)^۲=(ab)(IJ)$)، همهٔ توان‌های $I$ راتلیف-راش هستند. از طرف دیگر ، اگر $J$ یک تقلیل ایده‌ال $I$ از حلقه نوتری $R$ چنان باشد که $JI$ راتلیف-راش باشد، آن‌گاه عدد تقلیل $I$ نسبت به $J$ حداکثر یک است (اگر $JI^n=I^{n+۱}$، آن‌گاه برای هر $0\le k$، $(JI)^{n+k}=\left(I^۲\right)^{n+k}$. بنابراین $I^۲\subseteq\widetilde{(JI)}=JI\subseteq I^۲$). به‌ویژه اگر $I$ دارای تقلیل ایده‌ال اصلی $aR$بوده، $aI$ راتلیف-راش باشد، آن‌گاه $I$ پایدار است و همهٔ توان‌های $I$ راتلیف راش هستند.

**تعریف ۹.** (**حلقه مدرج وابسته**) فرض کنید $I$ یک ایده‌ال سره حلقه نوتری $\mathrm{R}$ باشد. حلقه مدرج وابسته[3] به $I$ را با $G(I)$ نشان داده، به‌صورت

$$G(I)=R/I\ \oplus\ I/I^۲\ \oplus\cdots\oplus\ I^n/I^{n+۱}\ \oplus\cdots$$

تعریف می‌کنیم. این حلقه به‌طور طبیعی به‌وسیلهٔ اعداد صحیح نامنفی مدرج می‌شود و به‌عنوان نقش همریخت حلقه ریسِ $I$ یا توسیع حلقه ریسِ $I$ بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود[۸]:

$$G(I)\ \cong\ R[It]/IR[It]\ \cong\ R[t^{-۱},It]/t^{-۱}R[t^{-۱},It]$$

1. reduction
2. stable
3. associated graded ring

ایده‌ال مدرج مثبت $G(I)_+$ از $G(I)$ عبارت است از $G(I)_+ =\oplus_{n\geq 1} I^n/I^{n+1}$. هم‌چنین حلقه مدرج وابسته به $R$ نسبت به صافی[1] راتلیف-راش را با $\widetilde{G(I)}$ نشانداده و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{G(I)} \coloneqq \oplus_{i\geq 0}\left(I^i/\widetilde{I^{i+1}}\right).$$

یادآوری می‌کنیم که لزوماً عمق $G(I)$ مثبت نیست، اما چنان‌که در ۵ می‌بینیم، همواره عمق $\widetilde{G(I)}$ مثبت است. به‌علاوه برای هر $i \gg 0$، $(\widetilde{G(I)})_i = (G(I))_i$.

راتلیف و راش در (۲,۳,۱) ثابت کرده‌اند که همهٔ توان‌های ایده‌ال $I$ راتلیف- راش هستند اگر عمق $G(I)$ مثبت باشد، یعنی $G(I)_+$ شامل یک عنصر غیرمقسوم‌علیه صفر باشد [۵]. برعکس این گزاره نیز درست است (مراجعه به برهان ۱.۲ [۴]).

**ملاحظه ۱۰.** همهٔ توان‌های ایده‌ال I راتلیف راش هستند اگر و تنها اگر عمق $G(I)$ مثبت باشد. حتی کلی‌تر، از منظر کوهمولوژی موضعی $G(I)$ نسبت به $G(I)_+$، برای هر عدد صحیح $n$،

$$H^0_{G(I)_+}\big(G(I)\big)_n = \widetilde{I^{n+1}} \cap I^n/I^{n+1}.$$

بنابراین $I^{n+1}$ راتلیف-راش است اگر و تنها اگر $H^0_{G(I)_+}(G(I))_n = 0$. هم‌چنین اگر $I$ یک ایده‌ال تولید شده به‌وسیلهٔ یک رشته منظم (یا حتی در حالت کلی‌تر، $I$ به‌وسیلهٔ یک رشته شبه‌منظم[2] تولید شده باشد)، آن‌گاه چون $G(I)$، یک حلقه چندجمله‌ای روی $R/I$، با متغیرهایی که تصویر مولدهای $I$ هستند، (یکریخت) است، $I$ و همهٔ توان‌های آن راتلیف-راش هستند؛ در واقع برای همهٔ اعداد صحیح $n, k$، $I^{n+k}: I^k = I^n$. به‌عنوان مثالی دیگر از ایده‌ال‌هایی که همهٔ توان‌های آن‌ها راتلیف-راش است می‌توان حالتی را در نظر گرفت که ایده‌ال $I$ از یک حلقه کوهن-مکالی[3] به‌وسیلهٔ یک رشته منظم تولید شده باشد. از این‌رو، همهٔ ایده‌ال‌های پارامتری از یک حلقه کوهن-مکالی راتلیف-راش هستند. فرض کوهن-مکالی بودن حلقه، اساسی است.

**مثال ۱۱.** زیرحلقهٔ $R = F[x, y^2, y^7, x^2y^5, x^3y]$ از حلقه چندجمله‌ای $F[x,y]$ روی میدآن $F$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت $I = (x, y^2)R$ یک ایده‌ال اولیه برای یک ایده‌ال ماکسیمال $R$ با ارتفاع[4] دو است و هم‌چنین $x^2y^5 \in (I^2 : I) - I$. از این‌رو $I$ راتلیف-راش نیست. در این‌صورت $R$ کوهن-مکالی نیست، و $x, y^2$ رشته منظم نیست. حلقه منظم موضعی $F[x,y]_{(x,y)}$ یک توسیع صحیح متناهی حاصل از موضعی‌سازی $R$ در ایده‌ال رادیکال $I$ است. بنابراین تکمیل[5] این موضعی‌سازی، حوزه است؛ و ویژگی‌های اساسی ذکر شده برای این مثال، پس از تکمیل نیز در آن حفظ می‌شود. بنابراین حتی در یک حوزه موضعی کامل از بعد دو، لزوما یک ایده‌ال پارامتری راتلیف-راش نیست.

1. filtration
2. quasi-regular
3. Cohen-Macaulay
4. height
5. completion

به‌علاوه، هینزر و همکاران در (قضیهٔ ۲.۲ و نتیجهٔ ۲.۳ [۵]) ثابت کرده‌آند که اگر ایده‌ال غیرصفر $I$ از یک حوزه موضعی کوهن-مکالی، ایده‌ال تقاطع تقریباً کامل[۱] باشد، الزاماً راتلیف-راش نیست. در مثال بعد یک ایده‌ال تقاطع کامل از یک حلقه چندجمله‌ای می‌بینیم که راتلیف-راش نیست.

**مثال ۱۲.** فرض کنید $I = (xy^5, x^6 - y^6, x^4y^2 - x^2y^4)$ ایده‌الی از حلقه چندجمله‌ای $F[x,y]$ باشد. در این‌صورت $I$ یک ایده‌ال صفر بعدی ۳-مولدی است. از این‌رو، $I$ یک ایده‌ال تقاطع تقریباً کامل است. توجه داریم که $x^3y^4 \notin I$، اما $x^3y^4 \in \left(I^3 : I^2\right)$ بنابراین $x^3y^4 \in \tilde{I}$.

اما ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ایِ تقاطع تقریباً کاملِ صفر بعدی دارای این ویژگی هستند که تمام توان‌های آن‌ها راتلیف-راش هستند.

**گزارهٔ ۱۳.** (گزارهٔ ۱.۹ [۱۶]) فرض کنید $R$ حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x_1, \cdots, x_d]$ با $d$ متغیر روی میدآن $F$ باشد. فرض کنید $I$ یک ایده‌ال تک‌جمله‌ای صفر بعدی تولید شده به‌وسیلهٔ $(d+1)$ عنصر باشد. در این‌صورت حلقهٔ مدرج وابسته به $I$، $G(I)$، عمق مثبت دارد. به‌ویژه، همهٔ توان‌های $I$ راتلیف-راش هستند.

توجه داشته باشید این گزاره را نمی‌توان برای ایده‌ال‌های تک جمله‌ای صفر بعدی که تعداد عناصر مولد مینیمال آن، دو تا بیش‌تر از بعد حلقه چندجمله‌ای است تعمیم داد.

**مثال ۱۴.** فرض کنید $I = (x^{10}, y^5, xy^4, x^8y)$، ایده‌الی تک‌جمله‌ای از حلقه چندجمله‌ای $F[x,y]$ باشد. در این‌صورت $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش نیست. زیرا $x^7y^3 \in \left(I^2 :_R I\right)$، اما $x^7y^3 \notin I$.

## بستار راتلیف-راش در تغییر حلقه

**گزارهٔ ۱.** فرض کنید $R$ و $S$ حلقه‌های نوتری باشد. به‌وسیلهٔ همریختی $f : R \longrightarrow S$، $S$ را به‌عنوان یک $R$-جبر در نظر بگیرید. فرض کنید $I$ یک ایده‌ال منظم از حلقه $R$ چنان باشد که $IS$ راتلیف-راش از حلقه $S$ و $I = f^{-1}(IS)$ باشد. در این‌صورت $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش از حلقه $R$ است. به‌ویژه، اگر $f : R \longrightarrow S$ پوشا باشد، آن‌گاه نگارهٔ وارون[۲] هر ایده‌ال راتلیف-راش حلقه $S$ در $R$ که منظم باشد، راتلیف-راش است.

مثال ۲ نشان می‌دهد که فرض پوشا بودن در این گزاره، اساسی است.

**مثال۲.** فرض کنید $R = F[[t^4, t^5]]$ و $S = R[t^6]$ که در آن $t$ یک متغیر روی میدآن $F$ است. به‌علاوه فرض کنید $J = t^{11}S$. در این‌صورت $J$ یک ایده‌ال راتلیف-راش از حلقه $S$ است، اما $I = J \cap R = (t^{15}, t^{16}, t^{17})R$ راتلیف-راش نیست زیرا $t^{18} \in R - I$ و $I^2 = (I + t^{18}R)^2$.

**نتیجهٔ ۳.** فرض کنید $S, R$ و $f$ مانند ۱.۳ تعریف شده باشند. در این‌صورت برای هر ایده‌ال منظم $I$ از $R$، $\widetilde{IS} = \tilde{I} \cap S$. زیرا $(IS)^{n+1} :_S (IS)^n = (I^{n+1} :_R I^n)S$ ([۱۳]، قضیهٔ ۷,۴، صفحهٔ ۴۸). (به‌ویژه اگر $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش باشد، آن‌گاه $IS$ نیز چنین خواهد بود. در نتیجه $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش است اگر و تنها اگر

1. almost complete intersection
2. preimage

برای هر ایده‌ال اول یا هر ایده‌ال ماکسیمال $P$ از حلقهٔ $R$، $IR_P$ راتلیف-راش باشد ([۱۲]، گزارهٔ ۳,۱۳ ، صفحهٔ ۷۰) و ([۱]، گزارهٔ ۳,۸ ، صفحهٔ ۴۰). حال فرض کنید $S$ روی $R$ یک‌دست باوفا[1] باشد، (بنابراین $f$ می‌تواند تابع شمول باشد)؛ در این‌صورت برای هر ایده‌ال منظم $I$ از $R$ ، $\widetilde{IS} = \tilde{I}S$ و $IS$ یک ایده‌ال راتلیف-راش $S$ است اگر و تنها اگر $I$ یک ایده‌ال راتلیف-راش $R$ باشد، زیرا فرض یک‌دست باوفا ایجاب می‌کند، که انقباضِ[2] توسیع[3] هر ایده‌ال $R$ در $S$ ، با خود آن ایده‌ال برابر باشد.

## تقلیل[4] ایده‌ال و بستار راتلیف-راش

مفهوم تقلیل ایده‌ال، بین یک ایده‌ال و بستار راتلیف-راش آن ارتباط برقرار می‌کند. در این مورد ما از نتایج نورثکات[5] و ریس[6] استفاده می‌کنیم [۱۴]. در حلقهٔ موضعی $(R, M)$ ایده‌ال $J$ یک تقلیل ایده‌ال $I$ است هرگاه $J \subseteq I$ و $J + MI$ یک تقلیل $I$ باشد. اگر $J$ یک تقلیل ایده‌ال $I$ باشد، آن‌گاه $I$ روی $J$ صحیح است، و حلقه‌های ریسِ $R[Jt] \subseteq R[It]$ دارای این ویژگی هستند که $R[It]$ به‌عنوان یک توسیع حلقه $R[Jt]$ صحیح است.

هر ایده‌ال منظم یک تقلیل بستار راتلیف-راشِ خودش است. اما در حالت کلی این شرط روی ایده‌ال‌های $J \subseteq I$ که $\tilde{J} = \tilde{I}$ به معنی آن است که برای هر $n \gg 0$، $J^n = I^n$ و این قوی‌تر از آن است که بگوییم ایده‌ال $J$ یک تقلیل ایده‌ال $I$ است. برای دریافت توضیحات بیش‌تر در این ارتباط به[۹] مراجعه کنید.

**مثال ۱.** فرض کنید $F$ یک میدان، $y, x$ دو متغیر و $R = F[x, y]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان $F$ و $J = (x^۲, y^۲)R$ باشد. در این‌صورت $J$ یک تقلیل $I = (x^۲, xy, y^۲)R$ است. اما $\tilde{J} = J \subset I = \tilde{I}$.

در ادامه به بیان تبصره‌ای که یک روش نسبتاً ساده‌تر برای محاسبهٔ بستار راتلیف-راش یک ایده‌ال در اختیار ما قرار می‌دهد، می‌پردازیم.

**ملاحظه۲.** اگر $J = (a_۱, \cdots, a_d)$ یک تقلیل ایده‌ال $I$ باشد [۱۵]، آن‌گاه

$$\widetilde{I^n} = \bigcup_{k=۱}^{\infty} \left( I^{n+k} :_{\mathrm{R}} \left( a_۱^k, \cdots, a_d^k \right) \right).$$

گزارهٔ ۳ به‌خوبی ارتباط بین عدد تقلیل و عدد راتلیف-راش را برای یک ایده‌ال نشان می‌دهد. برهان آن را می‌توانید در ([۲] گزاره ۲,۱) ببینید.

**گزارهٔ ۳.** فرض کنید $R$ یک حلقه نوتری و $I$ یک ایده‌ال منظم $R$ باشد که یک تقلیل آن، ایده‌ال اصلی است. فرض کنید $k(I)$ عدد راتلیف-راش $I$ و $r$ عدد تقلیل $I$ باشد. در این‌صورت $k(I) \leq \max\{0, r - ۱\}$.

اکنون به این سؤال برمی‌گردیم که فراوآنی ایده‌ال‌های راتلیف-راش چقدر است. توجه داریم که اگر عدد تقلیل ایده‌ال $M$-اولیه $I$ از حلقه کوهن-مکالی $(R, M)$، حداکثر یک باشد، آن‌گاه $G(I)$ کوهن-مکالی است [۱۹]. بنابراین همهٔ توان‌های این ایده‌ال راتلیف-راش است.

1. faithfully flat
2. contraction
3. extension
4. reduction
5. Northcott
6. Rees

## ایده‌ال‌های راتلیف-راش و چند جمله‌ای‌های هیلبرت

فرض کنید $(R,M)$ یک حلقه موضعی و $I$ یک ایده‌ال $M$-اولیه باشد در این‌صورت برای $n \gg 0$، طول[1] $\lambda(R/I^n)$ یک چندجمله‌ای برحسب $n$ از درجه بعد $R$ است، ما آن را چندجمله‌ای هیلبرتِ $I$ می‌گوییم و آن را با $H_I$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین ضریب جمله پیش‌رو $H_I$ را چندگآنگی[2] $I$ می‌گوییم و آن را با $e_0(I)$ نشان می‌دهیم.

حال سؤالی که ممکن است مطرح شود آن است که اگر ایده‌ال $M$-اولیه $I$ از حلقه موضعی $(R,M)$ راتلیف-راش باشد، آیا برای هر عدد صحیح مثبت $n$، $\lambda(R/I^n)$ توسط چندجمله‌ای هیلبرت $I$ تولید می‌شود؟ پاسخ این پرسش منفی است. به‌عنوان مثال: فرض کنید $F$ یک میدان، $(R,M)$ زیر حلقه $R=F[[t^۳,t^۴]]$ از حلقه سری‌های توانی سمبلیک $F[[t]]$ ، باشد. در این‌صورت $M$ و حتی تمام توان‌های آن راتلیف-راش است، اما چندجمله‌ای هیلبرتِ $M$، $P_M(n)=۳n-۳$ در شرط $P_M(۱)=\lambda(R/I)$ صدق نمی‌کند. ولی عکس این گزاره درست است یعنی اگر $I$ یک ایده‌ال $M$-اولیه از حلقه موضعی $(R,M)$ چنان باشدکه برای هر عدد صحیح مثبت $n$، $\lambda(R/I^n) = P_I(n)$، آن‌گاه $I$ راتلیف-راش است. می‌دآنیم اگر $I$ یک ایده‌ال $M$-اولیه از حلقه موضعی کوهن-مکالی یک بعدی $(R,M)$ باشد، آن‌گاه $I$ یک ایده‌ال پایدار است. بنابراین طبق ([۱۱]، نتیجهٔ ۱،۶) همهٔ توان‌های آن راتلیف-راش است. در ([۱۸]، بخش ۵) مثالی را می‌توان یافت که نشان می‌دهد این گزاره در حالتی‌که حلقه، منظم موضعی از بعد دو باشد، درست نیست.

بستار صحیحِ $I$، $\bar{I}$، بزرگ‌ترین ایده‌الی است که $I$ تقلیل آن است. چند جمله‌ای‌های $H_I$ و $H_{\bar{I}}$ چندگانگی یک‌سان دارند. اما چند جمله‌ای‌های $H_I$ و $H_{\tilde{I}}$ مساوی هستند؛ یعنی همهٔ ضرایب آن‌ها برابر هستند. در واقع $\tilde{I}$ بزرگ‌ترین ایده‌الی از حلقه $R$ است که چندجمله‌ای هیلبرت آن با چندجمله‌ای هیلبرت $I$ مساوی است.

**مثال۱.** فرض کنید F یک میدان، $R$ زیر حلقه $R=F[[t^۳,t^۴,t^۵]]$ از حلقه سری‌های توآنی سمبلیک $F[[t]]$ ، $I=(t^۳,t^۴)R$ و $J=t^۳R$ باشد. در این‌صورت $I$ به‌طور اکید مشمول در $M=(t^۳,t^۴,t^۵)R$ است و چون $I^۲=M^۲$، $\tilde{I}=M$ داریم $P_I(n) = P_M(n)=۳n-۲$. از طرف دیگر، برای تقلیل $J$ از $I$ و $M$ داریم $P_J(n)=۳n$.

عناصر سطحی[3] نقش مهمی در ارتباط با بستار راتلیف-راش بازی می‌کنند. عنصر $x\in R$ را یک عنصر سطحی از مرتبه $s$ برای $I$ گوییم هرگاه $x\in I^s$ و عدد صحیح $c$ چنان وجود داشته باشند که برای هر $c<n$، $(I^n:Rx)\bigcap I^c=I^{n-c}$. می‌دآنیم اگر $R$ میدآن خارج قسمتی نامتناهی داشته باشد، عناصر سطحی موجودند. به‌علاوه، اگر $R$ دارای عمق مثبت باشد، آن‌گاه هر عنصر سطحی برای $I$، یک عنصر منظم در $R$ است.

چندجمله‌ای هیلبرتِ حلقه مدرج وابسته $\widetilde{G(I)}$ نسبت به صافی راتلیف-راش را با $\widetilde{H_I}(t)$ نشان داده، به‌صورت $\widetilde{H_I}(t):=\lambda_{R/\tilde{I}}((G(I))_t)=\lambda(\widetilde{I^t}/\widetilde{I^{t+1}})$ تعریف می‌کنیم.

**ملاحظه ۲.** اگر $x$ یک عنصر سطحی برای $I$ چنان باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست، آن‌گاه با استفاده از لم ارتین-ریس[4]، برای هر $j\gg 0$ داریم $I^j:x=I^{j-۱}$. از این‌رو به سادگی می‌توان دید برای هر $i\gg 0$، $I^i=\widetilde{I^i}$

1. length
2. multiplicity
3. superficial
4. Artin-Rees Lemma

بالاخره، برای هر $n \leq 0$، داریم $\widetilde{I^{n+1}} : x = \widetilde{I^n}$. از این‌رو عمقِ $\widetilde{G(I)}$ مثبت است.

**قضیهٔ ۲.** فرض کنید $(R,M)$ یک حلقه کوهن-مکالی موضعی از بعد یک، $I$ یک ایده‌ال $M$ -اولیه از $R$، $t$ یک عدد صحیح نامنفی و $x$ یک عنصر سطحی برای $I$ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. $\widetilde{H_I}(t) = \widetilde{H_I}(t+1)$.

۲. $\lambda\left(I\widetilde{I^t} + \widetilde{I^{t+2}}/xI\widetilde{I^t} + \widetilde{I^{t+2}}\right) = 0$.

۳. $\widetilde{H_I}(t) = e_0(I)$.

۴. برای هر $t \leq n$، $\widetilde{H_I}(n) = e_0(I)$.

برای مشاهده برهان، ([۱۷]، قضیهٔ ۲,۱) را ببینید.

## حوزه‌های نوتری که همهٔ ایده‌ال‌های غیر صفر آن‌ها راتلیف-راش هستند

راتلیف و راش در ([۱۵]، نتیجهٔ ۲,۴) ثابت کرده‌آند که هر ایده‌ال غیر صفر در یک حوزه ددکیند[1] راتلیف-راش است. هم‌چنین در ([۱۵]، تبصرهٔ ۲,۵) آن‌ها ابراز علاقه کرده‌اند که حوزه‌های نوتری را که در آن‌ها همهٔ ایده‌ال‌های غیر صفر راتلیف-راش هستند، دسته‌بندی کنند. گزاره زیر را در پاسخ به این امر، هینزر و همکاران در ([۴]،گزارهٔ ۳,۱ ) اورده‌آند.

**گزارهٔ ۱.** فرض کنید $R$ یک حوزهٔ نوتری باشد. اگر هر ایده‌ال غیرصفر $R$ راتلیف-راش باشد، آن‌گاه بعد $R$ حداکثر یک است.

**اثبات.** فرض کنید بعد $R$ حداقل دو باشد. فرض کنید $(x,y)R$ ایده‌الی از $R$ با ارتفاع دو باشد. هم‌چنین فرض کنید $I = (x^4, x^3y, xy^3, y^4)R$ . طبق ([۱۰]، بخش ۵، قضیهٔ ۴,۱۴)، $x, y$ یک مجموعه مستقل است. بنابراین $I^2 = ((x,y)R)^8$، بنابراین $x^2y^2 \in \tilde{I}$ ؛ یعنی $I$ راتلیف-راش نیست. اما $x^2y^2 \notin I$.

طبق نتیجهٔ ۳، در حوزه‌های نوتری یک‌بعدی مانند $R$، می‌توان گفت؛ هر ایده‌ال غیرصفر در $R$ راتلیف-راش است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌ال ماکسیمال $M$ در $R$، $R_M$ نیزچنین ویژگی داشته باشد. بنابراین، بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض موضعی بودن حلقه را به گزاره زیر اضافه کرد .

**قضیهٔ ۱.** ([۴]، قضیهٔ ۳,۹) فرض کنید $R$ یک حوزه نوتری موضعی از بعد یک و $\bar{R}$ بستار صحیح آن باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. هر ایده‌ال $R$ پایدار است.

۲. هر ایده‌ال غیر صفر $R$ راتلیف-راش است.

۳. هر $R$ -زیرمدول $\bar{R}$ که شامل $R$ باشد یک حلقه است، و $\bar{R}/M\bar{R}$ با حاصل‌ضرب مستقیم سه کپی از $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ یکریخت نیست.

۴. برای هر $x \in \bar{R}$، $\dim_{R/M}(R[x]/MR[x]) \leq 2$.

1. Dedekind

و برای هر $x, y \in \bar{R}$، ۳ $\dim_{R/M}(R[x,y]/MR[x,y]) \leq$ و $\bar{R}/M\bar{R}$ با حاصل‌ضرب مستقیم سه کپـی از $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ یکریخت نیست.

## منابع


1. Atiyah M. F., MacDonald I. G. , "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley, (1969).
2. D'Anna M., Guerrieri A., Heinzer W., "Invariants of ideals having principal reductions", Comm. Algebra, 29 (2) (2001) 889-906.
3. Grayson D. R., Stillman M. E. , Macaulay2, "a software system for research in algebraic geometry", Available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.
4. Heinzer W., Lantz D., Shah K., "The Ratliff-Rush ideals in a Noetherian ring", Comm. Algebra, 20 (1992) 591-622.
5. Heinzer W., Johnston B., Lantz D., Shah K., "Coefficient ideals in and blowups of a commutative Noetherian domain", J. Algebra, 162 (1993) 355-391.
6. Heinzer W., Johnston B., Lantz D., Shah K., "The Ratliff-Rush ideals in a Noetherian ring: a survey", Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 140, Dekker, New York, (1993) 149-159.
7. H uckaba S., "Reduction numbers for ideals of analytic spread one", J. Algebra, 108 (1987) . 503-512.
8. Huneke C., "On the associated graded ring of an Ideal", Ill. J. Math, 26 (1982). 121-137.
9. Huneke C., Swanson I., "Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules", London Mathematical Society Lecture Note Series, vol.336, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).
10. Kunz E., "Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry", Birkhuauser, Boston, (1985).
11. Lipman J., "Stable ideals and Arf rings", Amer. J. Math., 93 (1971) 649-685.
12. Larsen M. D., McCarthy P. J. , "Multiplicative Theory of Ideals", Academic Press, New York and London, (1971).
13. Matsumura H., "Commutative Ring Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1986).
14. Northcott D. G., Rees D., "Reductions of Ideals in local rings", Proc. Cambridge Philos. Soc., 50 (1954) 145-158.

15. Ratliff L. J., D. Rush E., "Two notes on reductions of Ideals", Indiana Univ. Math. J., 27 (1978) 929-934.

16. Rossi M. E., Swason I., "Notes on the behavior of the Ratliff-Rush filtration", American Mathematical Society, Providence, RI (2003) 313-328 .

17. Rossi M. E., Valla G., "The Hilbert function of the Ratliff–Rush filtration", J. Pure and Appl. Algebra, 201 (2005) 25-41 .

18. Sally J, "Ideals whose Hilberrt function and Hilbert polynomial agree at n=1", J. Algebra, 157 (1993) 534-547 .

19. Valla G., "On form rings which are Cohen–Macaulay", J. Algebra, 58 (1979) 247-250 .